МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.

7 класс. Комбинаторика–2. 1 июня 2009.

К1.6б. Шесть вершин правильного 21–угольника покрашены красным цветом, а семь вершин — синим. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, а другой — с синими.

1. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2009 a) прямоугольников 1×2; b) прямоугольников 1×3 так, чтобы каждый прямоугольник имел ровно по одной общей вершине с двумя другими прямоугольниками (и не имел с ними других общих точек), а с остальными прямоугольниками не имел вообще никаких общих точек?

2. Двое игроков по очереди берут камешки из кучки, в которой вначале лежит 2008 камешков. Первый игрок может брать своим ходом 1 или 4 камешка, а второй — 1 или 3 камешка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. В очки 165 жителей Изумрудного города вставлено по 110 зеленых, розовых и голубых стекол. Эти жители встали по кругу так, что любые два соседа не носят стекол одиакового цвета. Какое максимальное число жителей может носить очки с разноцветными стеклами?

4. В графе 2009 вершин: 2008 вершин степени 200 и одна вершина степени 2. Докажите, что ребра этого графа нельзя раскрасить в 200 цветов так, чтобы одноцветные ребра не имели общих концов.

5. Пусть M — количество 13-элементных последовательностей латинских букв, в которой каждая следующая буква имеет в латинском алфавите больший номер, чем предыдущая. Пусть N — количество 13-элементных последовательностей латинских букв, в которой каждая следующая буква имеет в латинском алфавите номер не меньший, чем предыдущая, и все номера больше 13. Что больше, M или N? (На всякий случай напомним, что в латинском алфавите 26 букв).

6. Дан квадрат 144×144, изначально все клетки покрашены в белый цвет. За один ход разрешается перекрасить всех соседей одной клетки (белый цвет в черный, а черный — в белый). Можно ли за нечетное число ходов перекрасить все клетки в черный цвет?

7. На турнир приехало 1000 человек. Из любых пяти из них можно по крайней мере двумя способами выбрать трех попарно знакомых. Какое наименьшее количество пар знакомых среди них может быть?

8. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном a) 2000-угольнике; b) 1999-угольнике. После каждого своего хода игрок платит противнику число рублей, равное количеству пересеченных диагоналей. Кто из игроков может получить больше денег независимо от игры противника?